Departamento de Matemática Aplicada — Curso 13-14
Facultad de Informática, UPM — **Matemática Discreta I (MI)**
Control 2 — **19-12-13**

SOLUCIONES COMENTADAS

Antes de empezar a responder lee atentamente todos los enunciados. Cuando termines tu respuesta a un ejercicio vuelve a leer el enunciado y comprueba que has respondido a lo que se pregunta.

1. **(1 punto)**

Definición de retículo, de retículo complementario y de álgebra de Boole. Averigua si los conjuntos ordenados $(D_{28}, |)$ y $(D_{42}, |)$ son retículos y si son álgebras de Boole. Halla el complementario de 2 y de 14, si existen, en ambos conjuntos.

Retículo. Conjunto ordenado (R,<) en el que para cada par de elementos a,b de R existen sup{a,b} e inf{a,b}
Retículo **acotado**. Un retículo en el que existen elemento máximo 1 y elemento mínimo 0
Complementario en un retículo. El complementario de a $\in$R, es un elemento a' tal que sup{a,a'}=1, e inf{a,a'}=0
Álgebra de Boole. Retículo complementario y distributivo

$(D_n, |)$ es un retículo para cualquier n, observando que sup{a,b}=mcm(a,b), inf{a,b}=mcd(a,b)
$(D_n, |)$ es álgebra de Boole si los primos de la descomposición de n son todos distintos. Por tanto D_{28} NO es álgebra de Boole, pero D_{42} SÍ lo es

En D_{28} ni 2 ni 14 tienen complementario.
En D_{42} el complementario de 2 es 21 y el de 14 es 3

2. **(1 punto)**

Toda álgebra de Boole finita es isomorfa al álgebra de Boole de las partes de cierto conjunto. Enuncia con detalle este teorema, indica los pasos fundamentales de la demostración y define con precisión el isomorfismo.

Basta mirar las transparencias de clase

3. **(0,5 puntos)**

Comprueba la siguiente igualdad de expresiones booleanas (x+y')(xy)'= y', utilizando las propiedades de las álgebras de Boole (indicando en cada paso la propiedad utilizada) y mediante una tabla de verdad.

$$(x+y')(xy)' \underset{\text{Ley de De Morgan}}{=} (x + y')(x' + y') \underset{\text{Prop. distributiva de la suma respecto del producto.}}{=} xx' + y' \underset{\text{Prop. del complementario}}{=} y'$$

Y la comprobación con la tabla de verdad es trivial.

4. **(2 puntos)**

(a) Hallar la solución general de la relación de recurrencia

$$a_n = 3a_{n-1} + 10\, a_{n-2} + 5^n$$

(b) Hallar una relación de recurrencia para el número de listas de longitud n formadas con los símbolos 0, 1 y 2 en las que el símbolo 1 no aparece nunca en el lugar anterior a un 2

(a) Las raíces características son 5 y – 2.
La solución general de la homogénea asociada es $k_1 5^n + k_2(-2)^n$
La solución particular es $cn5^n$ (porque 5 es raíz característica de multiplicidad 1 y también base de la exponencial del término no homogéneo)
Operando resulta que c=5/7

La solución general de la relación es $k_1 5^n + k_2(-2)^n + 5n5^n/7$

(b) Sea a_n el número de listas de longitud n con esas condiciones. En primer lugar calculamos los primeros términos de la sucesión a_n

$a_1 = 3$ 0, 1, 2
$a_2 = 8$ 00, 01, 02, 10, 11, 20, 21, 22
$a_3 = 21$ Las únicas ternas no válidas son las que contienen la cadena 12, es decir,
120, 121, 122, 012, 112, 212,

Expresemos a_n en función de los términos anteriores. Miremos el último símbolo:

a) Si el último símbolo es 0, la lista de longitud n – 1 que se obtiene al suprimir ese símbolo cumple la condición pedida. Por tanto, añadiendo un 0 a una lista válida de longitud n – 1 se obtiene una lista válida de longitud n. Así tenemos a_{n-1} listas válidas.

b) Si el último símbolo es 1, la lista de longitud n – 1 que se obtiene al suprimir ese símbolo cumple la condición pedida. Por tanto, añadiendo un 1 a una lista válida de longitud n – 1 se obtiene una lista válida de longitud n. Así tenemos otras a_{n-1} listas válidas.

c) Si el último símbolo es 2, la lista será válida sólo si el término en la posición n – 1 **NO** es un 1. Por tanto, el número de listas válidas terminando en 2 será:
| {listas válidas de longitud n – 1}| – |{listas válidas de longitud n – 1 que terminan en 1}| =
= |{listas válidas de longitud n – 1}| – |{listas válidas de longitud n – 2}| = $a_{n-1} - a_{n-2}$

Los tres casos descritos a), b) y c) son excluyentes y cada lista válida se obtiene de una de las tres formas descritas. Por tanto la relación de recurrencia es

$$a_n = 3\,a_{n-1} - a_{n-2}$$

con las condiciones iniciales $a_1 = 3,\ a_2 = 8$

OBSERVACIÓN:
Algunos alumnos han razonado en el caso c) del siguiente modo:
La lista termina en 2, el término anterior puede ser o bien 0 o bien 2, luego por cada cadena válida de longitud n – 2 se tienen 2 cadenas válidas de longitud n, terminando en 02 o en 22.
Es decir, en el caso c) tendríamos 2 a_{n-2} listas válidas y la recurrencia sería $a_n = 2\,a_{n-1} + 2\,a_{n-2}$
Este razonamiento **NO** es correcto, porque así se consideran válidas las listas que son válidas hasta el término n – 2, su término n – 2 es 1 y terminan en 22, es decir, las listas de la forma … … 1 2 2

5. **(2 puntos)**
(a) En la asignatura X hay 98 alumnos matriculados y sus edades suman 2013. Demostrar que existe un conjunto de siete alumnos cuyas edades suman al menos 144.
(b) Los siete alumnos anteriores han asistido esta semana a tutorías. Cada uno de ellos sólo ha ido a una de las cuatro horas de tutorías de su profesor. ¿De cuántas formas distintas pueden haber acudido los alumnos?
(c) ¿Y si el profesor ha recibido alumnos en cada una de las cuatro horas?

(a) Razonemos por reducción al absurdo. Si las edades de todos los conjuntos de 7 alumnos sumaran menos de 144, entonces podríamos dividir los 98 alumnos en 14 grupos de 7. Cada uno de estos grupos sumaría a lo sumo 143 años, y por tanto los 14 grupos sumarían a lo sumo 143·14 = 2002 años. Lo que es imposible porque la suma total es 2013.
(b) Designemos por A, B, C, ….. a los alumnos. El alumno A puede haber ido a una de las cuatro horas, el alumno B lo mismo, el C también, etc. Así tendremos $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4 = 4^7$ formas distintas de asistencia de los alumnos.

(c) PRIMERA SOLUCIÓN
Llamemos X al conjunto de todas las distribuciones posibles de asistencia de los alumnos a las cuatro horas (diferentes) de tutoría. En el apartado anterior hemos visto que $|X| = 4^7$
Como son **siete** días diferentes y en cada uno tenemos **cuatro** posibilidades de estudio,

Consideramos ahora los siguientes subconjuntos de X:
A_1 = {distribuciones en las que **no** se utiliza la primera hora de tutoría},
A_2 = {distribuciones en las que **no** se utiliza la segunda hora de tutoría},
A_3 = {distribuciones en las que **no** se utiliza la tercera hora de tutoría},
A_4 = {distribuciones en las que **no** se utiliza la cuarta hora de tutoría},

El número de distribuciones que nos piden es por tanto, aplicando el Principio de inclusión-exclusión:
$|A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap A'_4| = |X - A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |X| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$ donde
$|X| = 4^7$
$\alpha_1 = \Sigma|A_i| = 4|A_1| = 4 \cdot 3^7$
$\alpha_2 = \Sigma|A_i \cap A_k| = \binom{4}{2}|A_1 \cap A_2| = 6 \cdot 2^7$
$\alpha_3 = \Sigma|A_i \cap A_k \cap A_n| = \binom{4}{3}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4 \cdot 1^7$
$\alpha_4 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$ porque alguna hora de tutoría se utiliza en cualquier distribución.
Sustituyendo obtenemos el número pedido:

$$4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4 = 8400$$

SEGUNDA SOLUCIÓN
Consideramos los conjuntos S={A, B, C, D, E, F, G} de estudiantes y R={1, 2, 3, 4} de las horas de tutoría. Las condiciones del ejercicio (utilizar todas las horas de tutoría) nos dicen que cada distribución de la asistencia a tutorías es una aplicación suprayectiva de S en R. Por tanto el número de formas en que se puede organizar el estudio es el número de aplicaciones suprayectivas de S en R, que es:

$$T(7,4) = 4^7 - \binom{4}{1}3^7 + \binom{4}{2}2^7 - \binom{4}{3}1^7 = 8400$$

TERCERA SOLUCIÓN
Se debe distribuir la asistencia a las cuatro horas de tutoría por parte de los siete alumnos, sin dejar libre ninguna hora y asistiendo los siete alumnos. Consideramos varios casos:

- Primer caso
  El profesor recibe en una hora a cuatro alumnos y en las tres restantes a cada uno de los alumnos restantes.
  Si es 2 la hora utilizada por 4 alumnos, el número de distribuciones es el número de permutaciones de los objetos (no distintos) 2, 2, 2, 2, 1, 3, 4. Este número es: $\binom{7}{4}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{7!}{4!1!1!1!}$
  Como la hora repetida puede ser cualquiera de las cuatro el número total de distribuciones en este primer caso es:
  $$4\binom{7}{4}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 840$$
- Segundo caso
  Una hora se utiliza por tres alumnos, otra por dos y las restantes una por cada alumno restante.
  Ahora la elección de las horas que repiten se puede hacer de 4·3=12 formas distintas (4 para la que se utiliza por tres alumnos y 3 para la que se utiliza por dos alumnos). Una vez que se han elegido, por ejemplo, 4 y 1, el número de distribuciones es el número de permutaciones de los objetos (no distintos) 4, 4, 4, 1, 1, 2 y 3. Así el número total en este caso es:
  $$12\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 5040$$
- Tercer caso
  Una hora de tutoría se utiliza por un alumno, y las restantes por dos alumnos cada una.

Ahora la elección de la hora que no repite alumno se puede hacer de 4 formas distintas. Una vez que se ha elegido, por ejemplo 3, el número de distribuciones es el número de permutaciones de los objetos (no distintos) 3, 1, 1, 2, 2, 4, 4. Así el número total en este caso es:

$$4\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 2520$$

En definitiva, el número total de distribuciones es:

$$840 + 5040 + 2520 = 8400$$

6. **(2 puntos)**
En una bolsa hay caramelos de varios sabores: fresa, naranja, limón y menta, 50 de cada sabor. Extraemos 13 caramelos de la bolsa.
(a) ¿Cuántas extracciones diferentes hay con al menos cuatro caramelos de menta?
(b) ¿Y si sacamos a lo sumo 5 de cada sabor?

(a) Si debe haber al menos 4 caramelos de menta, separémoslos. Y debemos extraer el resto, 9 caramelos, de la bolsa.
En una extracción llamamos
x_1 = número de caramelos de fresa
x_2 = número de caramelos de naranja,
x_3 = número de caramelos de limón,
x_4 = número de caramelos de menta.
Así cada extracción de caramelos es una solución de

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \end{cases}$$

El número de extracciones es, por tanto, $C^R_{4,9} = \binom{4-1+9}{9} = \binom{12}{3}$

(b) La limitación de a lo sumo 5 de cada sabor se expresa fácilmente en la ecuación anterior. Así cada extracción con la limitación exigida será una solución de

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13 \quad (*) \\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 5 \end{cases}$$

Llamando X = {soluciones enteras no negativas de (*)}
A_i = {soluciones de (*) tales que $x_i \ge 6$} $i = 1,...,4$
Resulta que el número buscado es el cardinal del conjunto $A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap A'_4$
$|A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap A'_4| = |X - A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |X| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$
(con la notación del Principio de la Criba)
$|X| = C^R_{4,13} = \binom{4-1+13}{13} = \binom{16}{3}$
$\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 4|A_1|$
A_1 = {soluciones de (*) tales que $x_1 \ge 6$} = {soluciones no negativas de $z_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$} (efectuando el cambio $z_1 = x_1 - 6$)
Luego $\alpha_1 = 4C^R_{4,7} = 4\binom{4-1+7}{7} = 4\binom{10}{3}$

$\alpha_2 = \sum_{i \ne j} |A_i \cap A_j|$ (el número de sumandos es $\binom{4}{2}$)
$A_1 \cap A_2$ = {soluciones no negativas de $z_1 + z_2 + x_3 + x_4 = 1$}, (cambios $z_1 = x_1 - 6$, $z_2 = x_2 - 6$)

luego $\alpha_2 = \binom{4}{2} C^R_{4,1} = \binom{4}{2}\binom{4}{1}$
$\alpha_3 = \sum_{i \ne j \ne k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$, pues no hay soluciones de (*) con tres variables mayores o iguales a 6.
$\alpha_4 = 0$, por la misma razón.
Por tanto, la solución al problema es $\binom{16}{3} - 4\binom{10}{3} + 24 = 560 - 120 + 24 = 464$

7. **(1,5 puntos)**

Se dispone de cuatro sensores situados al norte (N), este (E), sur (S) y oeste (O), respecto de una estación central C. La estación emite una señal verde cuando, o bien se activan los sensores E y O junto con uno de los otros dos, o bien cuando el sensor O se activa pero no los sensores N y E. La estación emite una señal roja en estas tres situaciones: (1) N y E activados, O y S desactivados: (2) E y O activados, S y N desactivados; y (3) E desactivado y los restantes activados. El resto de estados de los sensores son situaciones imposibles.

Hallar la expresión booleana más simple, en forma de suma de productos elementales, que represente la emisión de la señal verde.

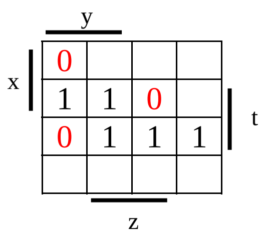
Cambiamos el nombre de las variables N, E, S y O por las más habituales x, y, x, t

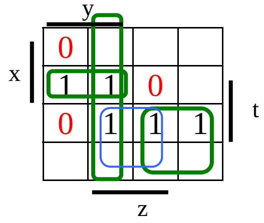
La función booleana f descrita en el enunciado toma el valor 1 (verde) en:

S(f) = {1111, 1101, 0111, 0011, 0001}   y el valor 0 (rojo) en N(f) ={1100, 0101, 1011}.

En el resto de valores f toma valores indeterminados (situaciones imposibles)

El mapa de Karnaugh es el siguiente:





Para simplificar la expresión asociada a la función f, debemos cubrir los "unos" del mapa (sin tapar los "ceros") con rectángulos lo más grandes que se pueda.

Se consigue con los rectángulos marcados en verde en la figura (el rectángulo azul es redundante)

La expresión simplificada es:

$$yz + x'y' + xyt$$

8. **(0,5 puntos)**

Se considera el conjunto X={1,2,3,4,5,6,7}.

a) ¿Cuál es la combinación con repetición de tamaño 5 siguiente a 11277? ¿Y la anterior?

b) ¿Y la lista sin repetición de tamaño 5 siguiente a 61257? ¿Y la anterior?

a) 11267 --- 11277 --- 11333

b) 61254 --- 61257 --- 61273